＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

【解答】

$\boxed{1}$　（１）$x=-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}$，$y=\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{15}$　（２）$a=6$，$b=8$（３）24(日)（４）$-2\sqrt{14}$

$\boxed{2}$　（１）①$a:h=1:1$ ② $\dfrac{49\sqrt{2}}{64}$（２）① $\dfrac{71}{234}$　② $\dfrac{5}{117}$

$\boxed{3}$　（１）$(t,\ at^2)$（２）4：1（３）$\dfrac{(a-1)^4}{a^2}$

$\boxed{4}$　（１）AC$=1+\sqrt{5}$，PD$=\sqrt{5}-1$（２）※解答は，解説をご参照ください。（３）$\dfrac{10+2\sqrt{5}}{5}\pi$

$\boxed{5}$　（１）1の重り…A，5の重り…B，25の重り…C（２）312（３）※解答は，解説をご参照ください。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

【配点】

| | | |
|---|---|---|
| $\boxed{1}$ | 各5点 | 小計　20点 |
| $\boxed{2}$ | 各6点 | 小計　24点 |
| $\boxed{3}$ | 各6点 | 小計　18点 |
| $\boxed{4}$ | （１）・（２）6点　（３）7点 | 小計　19点 |
| $\boxed{5}$ | （１）・（２）6点　（３）7点 | 小計　19点 |
| | | 合計 100点 |

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

【解説】

## 1　小問集合

（１）　$\dfrac{2\sqrt{2}}{x}+\dfrac{\sqrt{3}}{y}=3$…①　$\dfrac{\sqrt{3}}{x}+\dfrac{\sqrt{2}}{y}=3$…②とする。

①×$\sqrt{2}$−②×$\sqrt{3}$より，$\dfrac{1}{x}=3\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$

したがって，　　　$x=\dfrac{1}{3\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}$

分母の有理化をすると，$x=-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}$

①×$\sqrt{3}$−②×$2\sqrt{2}$より，$-\dfrac{1}{y}=3\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)$

したがって，　　　$y=\dfrac{1}{3\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}$

分母の有理化をすると，$y=\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{15}$　**$x=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}$，$y=\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{15}$**

（２）　表より，$5+8+a+3+6+b=a^2$

よって，　$b+22=a(a-1)$

この式から $a(a-1)\geq 22$ということが分かり，

$a$ と$b$は正の整数なので，$a\geq 6$　$b\geq 8$となる。

$a\geq 7$のとき，メジアンが 6 であることに反するので，$a=6$

$a=6$ を$b+22=a(a-1)$に代入すると，$b=8$　**$a=6$，$b=8$**

（３）　貯水池にもともとあった水の量を aL，1 日に放水する水の量を bL，1 日に流入する水の量を cL とする。

今の放水量では 48 日後に貯水池が空になるので，a＋48c＝48b…①

流入量が 2 倍になったとき，放水量を 25％増すことで 48 日後に貯水池を空にできるので，

$a+48\times 2c=48\times 1.25b$

$a+96c=60b$…②

②−①より，$48c=12b$

$4c=b$…③

①，③より $a+48c=48b=192c$

$a=144c$…④

流入量が2倍になったとき，放水量を変えなければd日後に貯水池を空にできるので，$a+d\times 2c=d\times b$

③，④より

$144c+2cd=4cd$

$c\neq 0$であるから，$144=2d$

$d=72$

予定(48日)より何日多く放水するかを求めるので

$72-48=24$　したがって**24(日)**。

（４）　求値式$x^2-2y^2-xy+2x+5y-3$を因数分解すると，$x^2+(2-y)x-2y^2+5y-3$

$$x^2+(2-y)x-(2y-3)(y-1)$$

$$x^2+(2-y)x+(3-2y)(y-1)$$

$$(x-2y+3)(x+y-1)$$

ここで，$x-2y=-3-2\sqrt{2}$　，$x+y=1+\sqrt{7}$　なので

$$x-2y+3=-3-2\sqrt{2}+3=-2\sqrt{2}$$

$$x+y-1=1+\sqrt{7}-1=\sqrt{7}$$

となるので答えは$-2\sqrt{2}\times\sqrt{7}=\boldsymbol{-2\sqrt{14}}$

## 2 中間集合

（１）

① 上面と底面の 12 本の辺に接することから球の中心は正六角柱の中心にあることが分かる。さらに辺 AB,BH,HG,GA に接することから球を面 ABHG で切断した断面を考えると，長方形 ABHG の 4 つの辺に円が接している。すなわち長方形 ABHG は正方形である。ゆえに$a:h=1:1$

② $O_1$の半径と$O_2$の半径の比は$O_2$の半径と$O_3$の半径の比に等しい。よって$O_1$の半径と$O_2$の半径の比と$O_1$の半径さえ分かれば良い。さらに正六角柱 ABCDEF－GHIJKL と正六角柱 A'B'C'D'E'F'－G'H'I'J'K'L'の相似比に等しい。

$O_1$の半径は六角柱の中心から底面の一辺の中点までの距離である。したがって

$$\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

となる。次に$O_2$の半径を求める。正六角柱 A'B'C'D'E'F'－G'H'I'J'K'L'において A'B'＝$x$とすると A'G'＝2$x$と表せる。そして正六角柱 A'B'C'D'E'F'－G'H'I'J'K'L'は$O_2$に内接しているため A'J'は$O_2$の直径に等しい。$O_2$の直径は$\sqrt{7}$

$$\mathrm{A'J'}=\sqrt{\mathrm{A'C'}^2+\mathrm{C'J'}^2}=2\sqrt{2}x$$

$$x=\frac{\sqrt{14}}{4}$$

すなわち正六角柱 ABCDEF－GHIJKL と正六角柱 A'B'C'D'E'F'－G'H'I'J'K'L'の相似比は$1:\frac{\sqrt{14}}{4}$である。よって$O_1$の半径と$O_2$の半径の比も$1:\frac{\sqrt{14}}{4}$となる。$O_2$と$O_3$の半径の比，$O_3$と$O_4$の半径の比も同じなので$O_4$の半径は

$$\frac{\sqrt{7}}{2}\times\left(\frac{\sqrt{14}}{4}\right)^3=\frac{49\sqrt{2}}{64}$$

（２） ①

条件を整理すると以下のようになる。

(a) じゃんけん

勝ち　＋2　 負け　−2　 引き分け　0

(b) カードについて

| 数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 約数の個数 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 4 | 3 | 4 | 2 | 6 | 2 |
| 約数の合計 | 1 | 3 | 4 | 7 | 6 | 12 | 8 | 15 | 13 | 18 | 12 | 28 | 14 |

(c) じゃんけんの勝敗とカードの数

| 数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 勝 | −2 | −4 | ＋4 | −6 | ＋4 | ＋8 | ＋4 | −8 | −6 | ＋8 | ＋4 | ＋12 | ＋4 |
| 敗 | ＋2 | ＋4 | −4 | ＋6 | −4 | −8 | −4 | ＋8 | ＋6 | −8 | −4 | −12 | −4 |

(d) 勝敗とポイントの数

| ポイント | −12 | −8 | −6 | −4 | −2 | ＋2 | ＋4 | ＋6 | ＋8 | ＋12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 勝 | | 1 | 2 | 1 | 1 | | 5 | | 2 | 1 |
| 負 | 1 | 2 | | 5 | | 1 | 1 | 2 | 1 | |

この勝ち負けは引いたカードの場合の数×相手が引いたそれより小さいカードの場合の数である。ただし違う段を見るときに，同じカードを引く場合は存在しないことは留意するべきである。

(例：12 というカードを引いて勝った人がそれを引いたら負けた人が 12 のカードを引いて－12 ポイントになる場合はない)

(ア)A さんがじゃんけんに勝つ場合.

＋12　1×12　12 通り

＋8　2×11　22 通り

＋4　5×8　40 通り

−2　1×8　8 通り

−4　1×3　3 通り

(イ)A さんがじゃんけんに負ける場合

＋8　1×9　9 通り

＋6　2×9　18 通り

＋4　1×4　4 通り

＋2　1×4　4 通り

−4　5×3　15 通り

(次ページへ続く)

−6　2×3　　　6通り

−8　1×1　　　1通り

よって(ア)では92通り，(イ)では50通り ある。

じゃんけんで勝つ確率と負ける確率はそれぞれ$\frac{1}{3}$で，二人のカードの引き方は

13×12＝156（通り）なので，最終的にAさんが勝つ確率は

$$\frac{1}{3}\left(\frac{92}{13\times12}+\frac{50}{13\times12}\right)=\boldsymbol{\frac{71}{234}}$$

② Aさんと Bさんが6ポイント差なので

(ア)Aさんが勝つ場合(A,B)＝(＋12, ＋6)　1×2　2通り

(＋8, ＋2)　2×1　2通り

(＋4, −2)　1×1　1通り

(＋2, −4)　1×1　1通り

(−2, −8)　1×2　2通り

(−6, −12)　2×1　2通り　　　以上10通り

(イ) Bさんが勝つ場合　(ア)と同じ場合の数なので10通り

よって，①と同様に計算し，$\frac{10\times2}{3\times13\times12}=\frac{5}{117}$　　$\boldsymbol{\frac{5}{117}}$である。

## 3　放物線と図形

(1)　まず点Aの座標を求める。点Aは，$y=\frac{1}{a}x^2$と$y=tx$の交点なので$\frac{1}{a}x^2=tx$となる。$x\neq0$なので両辺に$\frac{a}{x}$をかけると$x=at$となり，さらに$x=at$を$y=\frac{1}{a}x^2$に代入すると$y=at^2$となる。よって点Aの座標は$(at, at^2)$。Bの$y$座標はAの$y$座標と等しいので$y=at^2$，これを点Bを通る$y=ax^2$に代入すると$at^2=ax^2$で，$t>0$，$x>0$，$a\neq0$より$x=t$。よって点Bの座標は$(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{at^2})$とわかる。

（2）　（1）より$a=3$でA$(3t,\ 3t^2)$，B$(t,\ 3t^2)$が分かる。よってAB=$2t$。また。Cの$x$座標はBの$x$座標と等しいのでC$(t,\ 0)$。よってOC=$t$。したがって△ABPと△OCPのそれぞれの底辺ABとOCの比は2：1。さらにABとOCが平行なことから△ABP∽△OCPであるため，

面積比は△ABP：△OCP=$2^2:1^2=$**4：1**

（3）　正方形ならば縦横の長さが等しくなる。 縦の長さを文字を使って表すと，線分BCよりこれは$at^2-0=at^2$である。また，横の長さを文字を使って表すと，線分ABよりこれは$at-t$である。$at^2=at-t$，$t\neq0$より両辺を$t$で割って$at=a-1$，整理して$t=\dfrac{a-1}{a}$。これを縦の長さ$at^2$（横の長さでやってもよい）に代入すると

$a\left(\dfrac{a-1}{a}\right)^2=\dfrac{(a-1)^2}{a}$，面積は$\left(\dfrac{(a-1)^2}{a}\right)^2=\boldsymbol{\dfrac{(a-1)^4}{a^2}}$と求まる。

## 4　平面図形

（1）　正五角形の内角は108°なので∠BCA=(180°−108°)÷2=36°，∠ACD=∠ADC=108°−36°=72°，∠CAD=180°−72°−72°=36°，二等分線より∠ACP=∠PCD=36°，∠CPD=180°−72°−36°=72°。よって△ACD，△PAC，△CDPはいずれも二等辺三角形…①，△ACD∽△CDP…②。①より，CD=CP=AP=2…③，AC=AD…④。また②よりAC：CD=CD：PDで，AC=$x$と置くと$x$：2=2：PDでPD=$\dfrac{4}{x}$。よって③よりAD=AP+PD=$2+\dfrac{4}{x}$，④より$x=2+\dfrac{4}{x}$。$x\neq0$より両辺に$x$をかけて整理すると$x^2-2x-4=0$，解を求めて$x=1\pm\sqrt{5}$。AC＞0より，AC=$\mathbf{1+\sqrt{5}}$，PD=$1+\sqrt{5}-2=\mathbf{\sqrt{5}-1}$。

（2）格子点上に長さをとることについて，次ページ図1のように作図すると，S´T´がACと同じ長さの$1+\sqrt{5}$となる。なお長さ2は図1のX´Y´のように取ればよい。

次にS´T´とXYから長さをコンパスでとって，CD=2，AC=AD=$1+\sqrt{5}$となるように△ACDを作図する。そして△ACDを土台にしてAB，BC，DE，EAをそれぞれ長さが2になるように取れば次ページ図2のように正五角形ABCDEができる。

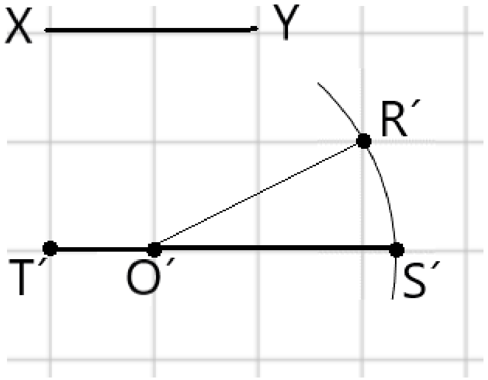


図 1

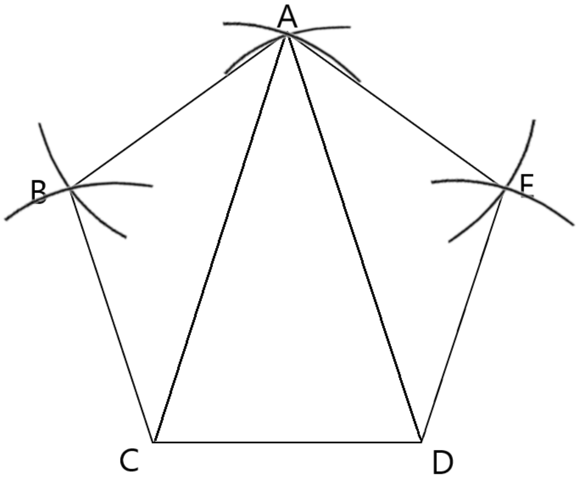


図 2

（3）図 3 のように外心 Q から A と B にそれぞれ線を引く。正五角形のため Q から各頂点に線を引くと∠Q は 5 等分されるので，∠AQB＝360°÷5＝72°。さらに QA＝QB より△QAB は二等辺三角形なので，Q から AB に垂線を下ろして交点を M とすると M は AB の中点なので AM＝MB＝1，∠QMA＝90°。さらに∠AQB は QM で二等分されるので∠AQM＝36°，∠MAQ＝54°。図 3 を拡大した図 4 のように，∠QMN＝36°になる N を取ると∠AMN＝54°なので，△NMA と△NQM はどちらも二等辺三角形であるために AN＝MN＝NQ。更に△NQM∽△BAC より NQ：QM＝BA：AC＝2：$1+\sqrt{5}$，AQ：QM＝AN＋NQ：QM＝4：$1+\sqrt{5}$。外接円の半径である AQ を r と置くと，QM＝$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$r となる。$AM^2+QM^2=AQ^2$なので，それぞれ代入して

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}r\right)^2+1^2=r^2$，$1=\frac{5-\sqrt{5}}{8}r^2$，$r^2=\frac{8}{5-\sqrt{5}}\times\frac{5+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}=\frac{8\left(5+\sqrt{5}\right)}{20}=\frac{10+2\sqrt{5}}{5}$。

外接円の面積を S とすると，$S=\pi r^2=\frac{10+2\sqrt{5}}{5}\pi$。

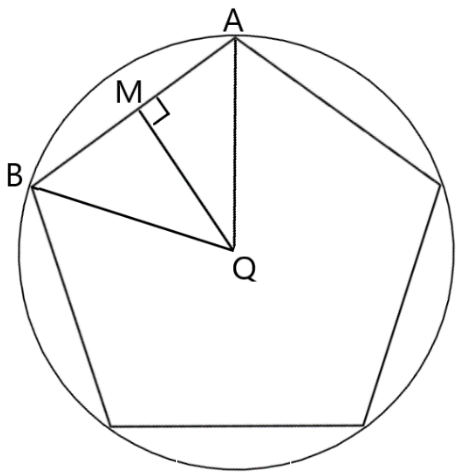


図 3

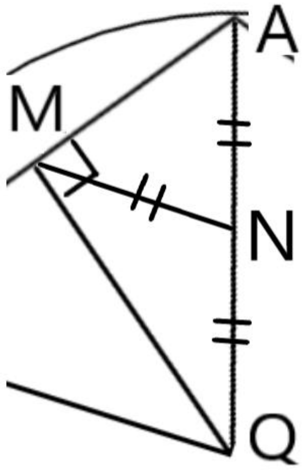


図 4

## 5 整数

（1）最も大きい 25 は C にのせなくてはいけないということはすぐわかる。5 は C，D にはもちろん乗せられず，A では 18 より小さくなってしまうので B に乗せる。消去法で 1 は A に乗せる。

したがって，**Aに1の重り，Bに5の重り，Cに25の重り**　を乗せる。

（２）全ての重りをDにのせたとき，天びんは最大の数を表す。

よって，重さ 1，5，25，125 の全ての重りをDにのせたとき，天びんは

$(1+5+25+125)\times 2=312$ より **312** を表す。

（３）

（証明）次の①，②のような重りの配置の天びんを考え，重さが 1 または重さが S（Sは1から$5^{n-1}$までの重さのうち任意の重さ ）の重りに以下のような操作をする。

①重さ 1 の重りが，天びんのいずれの皿にもおかれていないときまたはA，B，Cいずれかに置かれているとき，重さ 1 の重りを 1 つ右の皿へ動かす。ただし，B におかれているときはその重りを天びんから取り除き，天びんに置かれていないときはCに置く。

②重さ 1 の重りがDに置かれているとき，その重りをAに移動させ，重さSの重りを①もしくは②における重さ1 の重りと同様の操作をする。

①のとき，天びんは，明らかに +1 されていることが分かる。

②のとき，重さ 1 の重りがDからAへ移動すると，天びんはもとの整数に −4 された数になるが，重さ 5 の重りが①のような操作が出来れば +5 されるので，天びんはもとの整数を +1 した数になる。操作できなかった場合は，重さ 5 の重りを②のように動かす。

このように，ある重さSがDに置かれているときその重りをAに移動させ，その5倍の重さの重りを①のように操作し，出来なければ②の操作をする。このような操作を①の操作が出来るまで続けると，天びんで最終的に +1 を表せる。

したがって，①と②の操作によって天びんはもとの整数に +1 された数を表せる。（証明おわり）